Finde Maxima und Minima der folgenden Funktionen

1. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}5x - 1$

2. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 4x - 1$

3. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x - 1$

4. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 5x - 1$

3) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x - 1$

HP/TP: notwendige Bedingung $f'(x) = 0$

HP/TP heißt Hochpunkt / Tiefpunkt (Maximum/Minimum)

Ich suche das x!

Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 - 1{,}5 \cdot 2x + 4{,}5$

$f'(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$

setze $f'(x) = 0$

$0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5 = 0 \quad | :0{,}5$

da vorne was mit x^2 → pq Formel vorbereiten!

$x^2 \overset{p}{-6}x + \overset{q}{9} = 0 \quad | \; p = -6, \; q = 9$

$x_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9}$

das schafft auch der Taschenrechner direkt

$= 3 \pm \sqrt{3^2 - 9}$

$= 3 \pm \sqrt{9 - 9}$

$= 3 \pm 0$

$= 3$

$x_1 = 3$

$x_2 = 3$

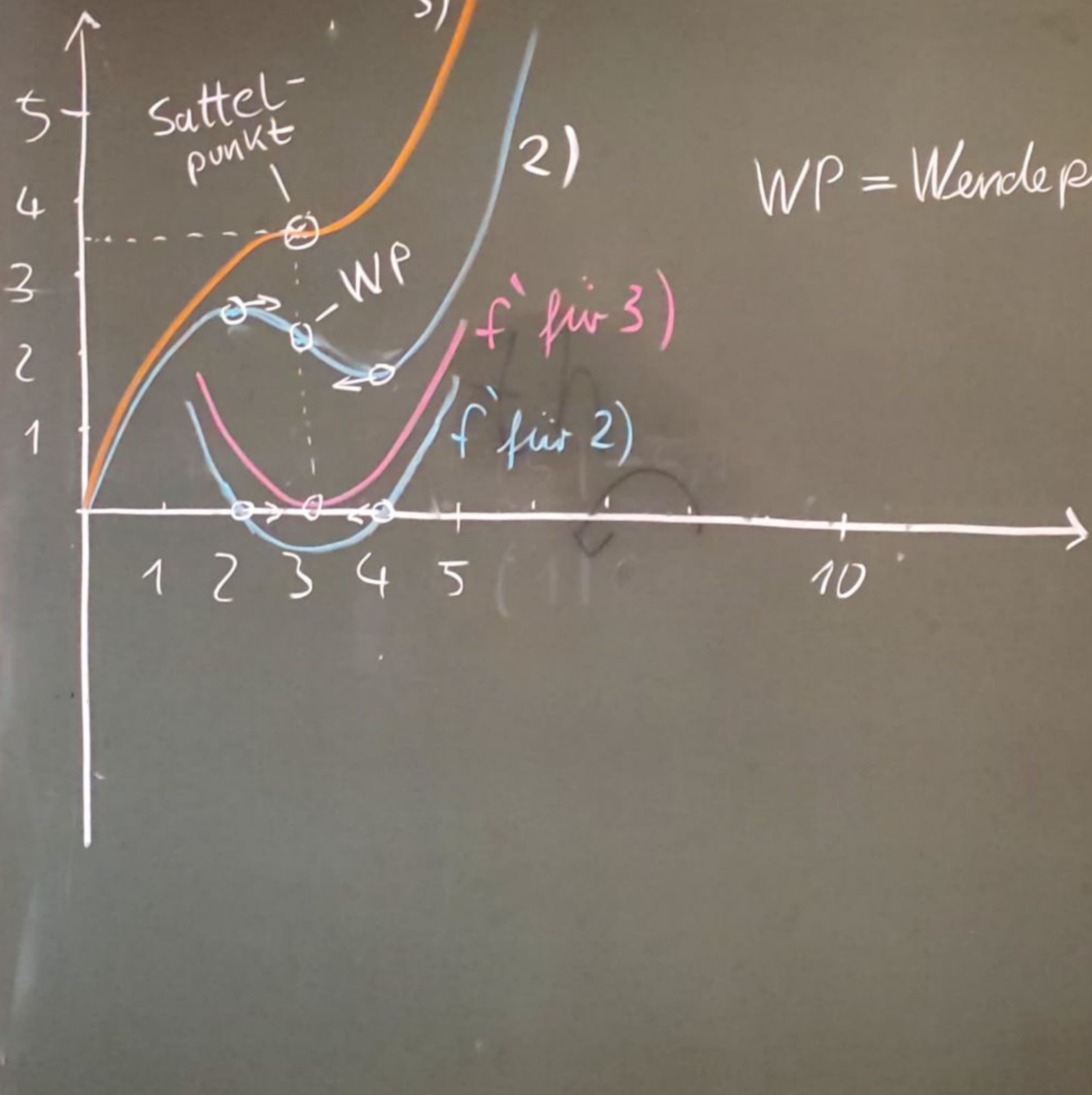
x-Werte sind da, y-Werte fehlen noch

y-Werte: Einsetzen der x-Werte in die Ausgangsfunktion $f(x)$

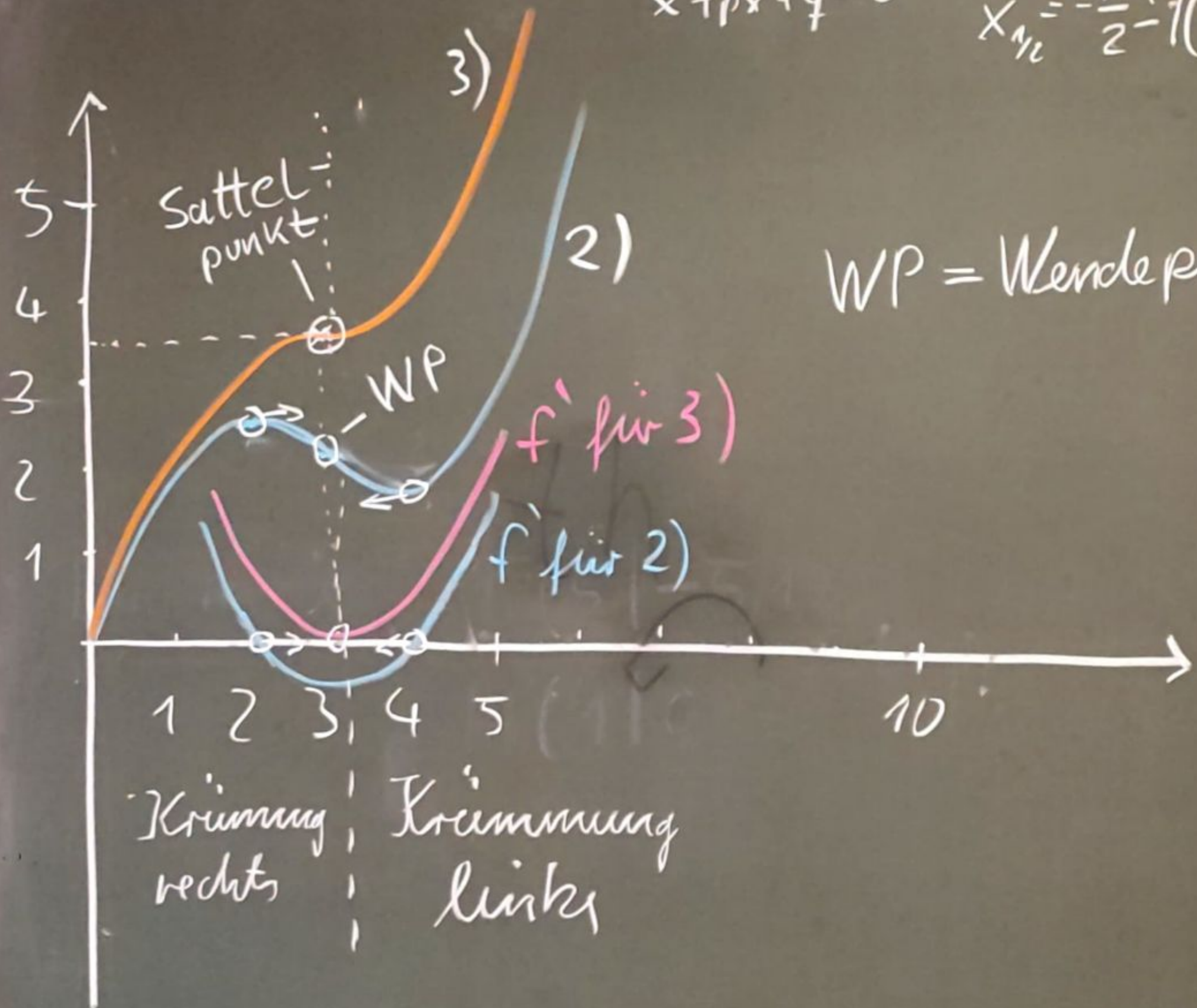
x_1: $f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3^3 - 1{,}5 \cdot 3^2 + 4{,}5 \cdot 3 - 1 = 3{,}5$ (Taschenrechner, Runden)

$x^2 + px + q = 0$ $\qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

WP = Wendepunkt



$x^2 + px + q = 0$ $\quad$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$



WP = Wendepunkt

Am Sattelpunkt sind Hoch + Tiefpunkt im Wendepunkt zusammen gelaufen.

2) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 4x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x - 3 = x - 3$

Wendepunkt: notw. Bed. $f''(x) = 0$

suche x-Wert.

setze: $x - 3 = 0 \quad | +3$

$x = 3$

Die Steigung der Tangenten an f steigen nicht und fallen nicht. Sie haben einen extremen Wert (Maximum oder Minimum)

y-Wert: $f(3) = \frac{1}{6}3^3 - 1{,}5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1 = 2$ In die Ausgangsfunktion einsetzen

Wendepunkt $W(3|2)$

Sattelpunkt:

da ist $f'(x) = 0$ und gleichzeitig $f''(x) = 0$

Berechne HP/TP/WP/SP für

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + x + 3$

(2|1) (2,5|2,9)

(1|3,46) (4|2,33)

Untersuchung auf HP/TP/WP/SP

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

HP/TP: notw. Bed. $f'(x) = 0$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \quad | : \frac{1}{4}$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad | p = -2 \quad q = 1$

$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

Prüfung auf SP: $f''(x) = 0$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad | + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \quad | : \frac{1}{2}$

$x = 1 \Rightarrow$ Sattelpunkt

y-Wert: $f(1) = \frac{1}{12} \cdot 1^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + 2 = 2{,}08 \qquad S(1|2{,}08)$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + x + 3$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

HP/TP: notw. Bed. $f'(x) = 0$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0 \quad | : \frac{1}{4}$

$x^2 - 5 + 4 = 0 \quad | p = -5 \quad q = 4$

$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$

$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = 1$

y-Werte: $f(4) = \frac{1}{12} 4^3 - \frac{5}{8} 4^2 + 4 + 3 = 2{,}33 \quad T(4|2{,}33)$

$f(1) = \frac{1}{12} 1^3 - \frac{5}{8} 1^2 + 1 + 3 = 3{,}46 \quad H(1|3{,}46)$

WP: notw. Bed. $f''(x) = 0$

$\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} = 0 \quad | + \frac{5}{4}$

$\frac{1}{2}x = \frac{5}{4} \quad | : \frac{1}{2}$

$x = \frac{5}{2} = 2{,}5$

y-Wert: $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} + 3 = 2{,}90 \quad W(2{,}5|2{,}90)$